Recenzja rozprawy doktorskiej

Convex sets, barycentric algebras and beyond

Autor rozprawy: mgr Adam Komorowski

(27 maja 2021)

Rozprawa dotyczy algebraicznych aspektów zbiorów wypukłych oraz ich uogólnień. Nowy pomysł, to wyszczególnienie kombinacji wypukłych, ustalając tzw. *threshold*, czyli liczbę $0 < t \leq 1/2$ i ograniczając się do kombinacji wypukłych z parametrami z przedziału $[t, 1-t]$. W przypadku, gdy $t = 1/2$, mamy do czynienia z *wypukłością w sensie Jensena* (Jensen convexity). Ostatni rozdział omawia inny algebraiczny aspekt zbiorów wypukłych, mianowicie pojęcie przedziału algebraicznego, który uogólnia zwykły przedział jednostkowy. Mając dany pierścień R wraz z ustalonym przedziałem algebraicznym, dostajemy naturalne pojęcie zbioru wypukłego w każdym module nad R.

Rozprawa jest oparta na następujących dwóch artykułach:

(1) Komorowski, A.; Romanowska, A. B.; Smith, J. D. H. *Barycentric algebras and beyond.* Algebra Universalis 80 (2019), no. 2, Paper No. 20, 17 pp.

(2) Komorowski, A.; Romanowska, A. B.; Smith, J. D. H. *Keimel's problem on the algebraic axiomatization of convexity.* Algebra Universalis 79 (2018), no. 2, Paper No. 22, 20 pp.

Jest jeszcze errata, dostępna na stronie J. D. H. Smitha (`https://orion.math.iastate.edu/jdhsmith/math/184erata.pdf`), która zawiera drobne poprawki do artykułu (2).

Czasopismo *Algebra Universalis* jest, jak sama nazwa wskazuje, bardzo specjalistyczne, aczkolwiek cieszące się sporym uznaniem w środowisku związanym z algebrą uniwersalną.

Omówienie i ocena wyników rozprawy. Właściwa część przedstawionej pracy doktorskiej składa się z trzech rozdziałów (pierwszy rozdział, to wiadomości wstępne).

Rozdział 2 (Threshold-t barycentric algebras) zawiera nowe przykłady algebr związanych z klasycznymi zbiorami wypukłymi. Operacje algebraiczne to kombinacje wypukłe, przy czym dla każdego ustalonego współczynnika $t \in [0, 1]$ mamy taką operację $\underline{t}$. Nowy pomysł, to ograniczenie współczynników do podprzedziału J przedziału $[0, 1]$, definiując $\underline{t}$ jako rzutowanie dla t spoza J. Przykłady te dają negatywną odpowiedź na pytanie Klausa Keimela z 2015 roku, czy algebry barycentryczne można skasjomatyzować zamieniając prawo nazywane *skew-associativity* (skośna łączność?) na tzw. prawo entropii. Na uwagę zasługuje twierdzenie mówiące, że jeśli $t < 1/2$ to threshold-t algebra barycentryczna opisuje zwykłe zbiory wypukłe, mimo, że jako algebra ma inne własności.

Rozdział 3 zawiera naturalne uogólnienie wyników poprzedniego rozdziału, zamieniając ciało liczb rzeczywistych na podciało. Można tu znaleźć klasyfikację rozmaitości algebr barycentrycznych z parametrem $q < 1/2$ należącym do ustalonego podciała $\mathbb{F}$, gdzie kombinacje wypukłe bierze się ze współczynnikami z przedziału $(q, 1-q) \cap \mathbb{F}$. Algebry odpowiadają przestrzeniom afinicznym nad $\mathbb{F}$, a także zbiorom wypukłym w takich przestrzeniach, jeśli tylko $q \geq 0$.

Rozdział 4 (ostatni) zawiera kontynuację badań z rozdziału 3 a także dalsze uogólnienia zbiorów wypukłych. Mianowicie zamiast przedziału $[0, 1]$, który jest jednoznacznie zdefiniowany w każdym ciele liniowo uporządkowanym, bierze się tzw. przedział algebraiczny, czyli abstrakcyjny podzbiór J ustalonego pierścienia, zawierający $0, 1$ oraz zamknięty na kombinacje wypukłe ze współczynnikami ze zbioru J. Pojęcie to zostało wprowadzone przez Jamisona w latach siedemdziesiątych ubiegłego stulecia, przy czym Jamison wymagał tylko zamkniętość na mnożenie i operację dopełnienia $x \mapsto 1 - x$. Przedział zamknięty na kombinacje wypukłe nazywa *replete* i podaje przykład, że nie każdy przedział taki jest. Muszę tu przyznać, że przykład 4.2.6 w przedstawionej rozprawie jest o wiele prostszy, niż ten u Jamisona.

Rozdziały 2,3,4 zawierają sporo specjalistycznych wyników dotyczących algebr barycentrycznych i ich uogólnień (także tzw. *binary modes*, odpowiadających wypukłości w sensie Jensena). Całość można odebrać jako studium algebraicznych własności zbiorów wypukłych i przestrzeni afinicznych, przy czym w ostatnim rozdziale Autor przedstawia bardziej abstrakcyjne (ale nadal naturalne) ujęcie, zamieniając ciało rzeczywiste na dowolny pierścień przemienny. Tutaj przydałoby się może więcej konkretnych przykładów, które w efekcie można znaleźć we wspomnianej pracy Jamisona, a także w artykułach, które tę pracę cytują.

Wyniki rozprawy są dość specjalistyczne, ale wierzę, że dla matematyków pracujących w algebrze uniwersalnej będą to rzeczy inspirujące do dalszych badań w teorii algebr barycentrycznych i ich uogólnień. Warto też zwrócić uwagę, że dowody różnych lematów i twierdzeń, wprawdzie elementarne, bywają całkiem nietrywialne i wymagające odpowiednich przeliczeń czy zgrabnego połączenia różnych własności.

Jest jeszcze kwestia udziału Autora w przedstawionych wynikach. Skoro rozprawa została dopuszczona do recenzji, domniemywam, że udział pana Adama Komorowskiego w wynikach jest na pewno znaczący. Tak więc, moja ogólna ocena rozprawy jest jak najbardziej pozytywna.

Uwagi krytyczne. Rozprawa jest zredagowana poprawnie, Autor we wstępie wyraźnie i jasno opisuje wyniki, wskazując bibliografię, a w szczególności swoje publikacje. Jeśli chodzi o szczegóły, to jednak mam kilka uwag krytycznych, które przytaczam poniżej.

1. Strona 9: Autor bez żadnego uprzedzenia zaczyna używać tzw. odwrotnej notacji

polskiej. Mimo nazwy, nie jest to powszechnie używana notacja. Jedno zdanie wyjaśniające byłoby tu w zupełności wystarczające, ale też konieczne.

2. Strona 9: Definicja „clone" wygląda, wyrażając się potocznie, jak „masło maślane" (the clone of an algebra is the clone of ...).

3. Strona 10: Varieties. Można się wprawdzie łatwo domyślić, co oznaczają litery $\mathbf{H}$, $\mathbf{S}$ i $\mathbf{P}$, ale zdecydowanie wymaga to wyjaśnienia. Recenzent czy inny potencjalny czytelnik nie musi pochodzić ze środowiska związanego z algebrą uniwersalną.

4. Strona 13, definicja 1.5.2. Nie rozumiem tej definicji. Po pierwsze, grupoid to kategoria, w której każdy morfizm jest odwracalny, albo (równoważnie) struktura z częściową operacją 2-argumentową spełniającą odpowiednie aksjomaty. Po drugie, mam wrażenie, że $(\mathbb{N}, \cdot)$ spełnia definicję 1.5.2, przy czym obustronnym anihilatorem jest oczywiście zero. Z drugiej strony, $2 \cdot 2 = 4 \neq 2$, zatem mnożenie nie jest idempotentne.

5. Strona 60, Remark 4.2.5: Nazwisko „Jamison" jest źle napisane. Co więcej, według MathSciNet Robert E. Jamison opublikował tylko kilka prac z dodatkowym nazwiskiem „Waldner", a w artykule [13] z którego pochodzi definicja *algebraic interval* widnieje po prostu „Robert E. Jamison".

6. Strona 62, Example 4.2.11: Autor nie zauważył, że pierwsza linijka wystaje poza margines (to drobna uwaga estetyczno-typograficzna).

7. Strona 72, definicja 4.4.1: W punkcie (a) powinno być $a + c \leq b + c$.

8. Strona 72, uwaga 4.4.3: Powinno być „addition" zamiast „addiction".

9. Bibliografia (References): Już na samym początku znalazłem literówki („Banaszewski", „Huston", „Białnicki"). Wolałem dalej nie analizować bibliografii.

Powyższe uwagi nie mają wpływu na ogólną (pozytywną) ocenę rozprawy.

Konkluzja. Uważam, że przedstawiona praca doktorska pana mgr Adama Komorowskiego **spełnia** ustawowe i zwyczajowe wymogi stawiane rozprawom doktorskim. Wnioskuję o przyjęcie rozprawy i dopuszczenie Autora do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

27 maja 2021

Wiesław Kubiś

Institute of Mathematics, Czech Academy of Sciences